PLANARIDAD DE GRAFOS
Entrega 8

1. Contesta razonadamente a las siguientes cuestiones:
   a) ¿Cuántas caras puede tener un grafo planar y conexo con 36 aristas y $3 \leq d(v) \leq 4$, $\forall$ v $\in$ V?
   b) ¿Es cierto que si G es un grafo simple, conexo y plano con 15 vértices y 25 aristas, entonces su grafo dual G* tiene 12 vértices?

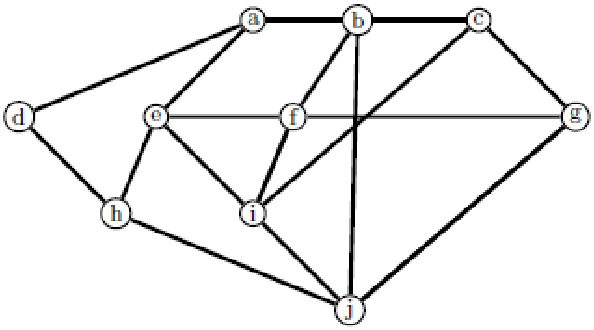
Solución

a)

$$\begin{cases} 3n \leq 2q = \sum_{v \in V} d(v) \leq 4n \quad \Rightarrow \frac{1}{2}q \leq n \leq \frac{2}{3}q \quad \Rightarrow 18 \leq n \leq 24 \\ 2-24+36 \leq c = 2-n+q \leq 2-18+36 \ \Rightarrow 14 \leq c \leq 20 \end{cases}$$

b) Usando la fórmula de Euler n – q + c = 2, donde n = 15 y q = 25, se deduce que c = 12. Por consiguiente, el grafo dual G* tiene 12 vértices.

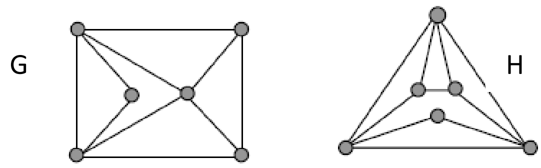
2. Decide razonadamente si el grafo G de la siguiente figura es o no es un grafo planar.



Solución

El grafo G contiene un subgrafo, inducido por el conjunto de vértices {b; c; f; g; i; j}, que es isomorfo a $K_{3;3}$ y, por el teorema de Kuratowski, el grafo G no puede ser planar.

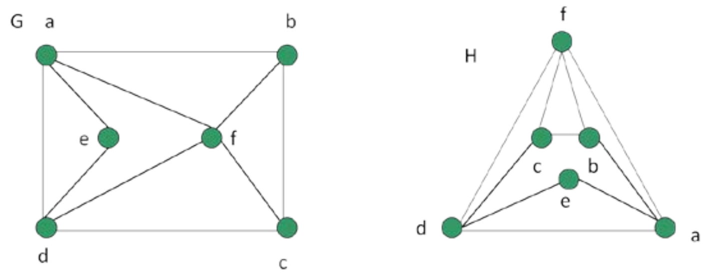
3. Se consideran los siguientes grafos G y H



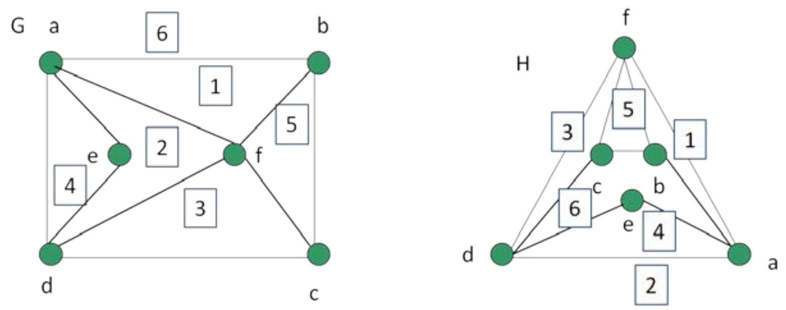
   a) Demuestra que G y H son isomorfos.
   b) Construye los duales geométricos G* y H* de los grafos G y H anteriores.
   c) Comprueba que G* y H* no son isomorfos.

Solución

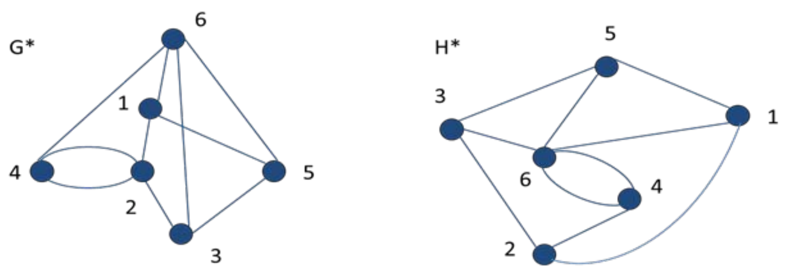
a) Los grafos G y H son isomorfos, identificamos vértices con la misma etiqueta:



b) Se etiquetan las regiones que delimitan las aristas de los grafos G y H isomorfos:



Se construyen los duales geométricos G^* y H^* de los grafos isomorfos anteriores.



c) La sucesión de los grados de las caras en el grafo G es [3, 4, 3, 3, 3, 4], luego la sucesión gráfica del grafo dual de G es [3, 4, 3, 3, 3, 4].

La sucesión de los grados de las caras en el grafo H es [3, 3, 3, 3, 3, 5], luego la sucesión gráfica del grafo dual de H es [3, 3, 3, 3, 3, 5].

Como no coinciden las sucesiones gráficas de G^* y H^*, los grafos duales no son isomorfos.